第 39 卷 第 5 期
2 0 1 7 年 10 月
低 温 物 理 学 报
CHINESE JOURNAL OF LOW TEMPERATURE PHYSICS
Vol.39, No.5
Oct 2 0 1 7

基于磁场强度的高温超导磁悬浮轴承数值仿真方法

杨文姣　　刘　坤　　马光同†
西南交通大学牵引动力国家重点实验室

收稿日期:2017-07-02;接收日期:2017-09-12

【摘要】 本文提出了一种高温超导磁悬浮轴承数值仿真方法,并对其悬浮力计算结果进行了验证.该方法采用基于磁场强度的 H 法对高温超导进行建模,利用间接耦合方法体现磁场对于超导作用,从而对高温超导磁悬浮进行仿真.该模型在有限元软件 COMSOL Multiphysics 中进行计算.此外,本文探讨了剖分网格对于模型计算时间、精度的影响和不同涂层导体堆叠方式对悬浮力的影响,以指导在实际应用中对于堆叠方式的选取.

关键词: 磁场强度法;高温超导磁悬浮;有限元法
PACS: 84.71.Mn; 74.25.N-; 85.25.Am; 03.50.De

1 引　　言

高温超导磁悬浮轴承是高温超导最具应用前景的应用之一,为使高温超导技术在应用时相比传统技术更具竞争力,同时考虑到成本问题,一个能对其高温超导悬浮性能进行准确预测与研究的数值仿真模型则显得至关重要.

对于高温超导磁悬浮轴承的数值仿真关键点是描述超导特性,因此超导电流的计算就成了重中之重.一般来说,计算电流密度时所使用的方程中包含电阻,而由于超导独特的性质,超导电阻又受到电流的影响,这样实际上就造成了超导电流密度依赖于电流密度本身,即超导电阻对超导电流总量具有循环依赖性,从而导致了模型无法求解计算,因此必须采用特殊方法规避参数的循环依赖.有限元法就是最常用的超导数值仿真方法.

目前对于超导数值仿真方法主要有基于矢量磁位的 A 法[1]、矢量电位的 T 法[2]和磁场强度的 H 法[3-5].近年来随着商业有限元软件 COMSOL Multiphysics(以下简称 comsol)的逐步推广,H 法受到了越来越多学者的关注.在 comsol 软件中可以利用 H 法建立超导控制方程,再辅以棱单元法对麦克斯韦方程组进行求解,并且所求得的磁场强度 H 包含其时域下弛豫效应.而方程的非线性可以通过在求解器中设定非线性方程残差的阈值即最小化残差进行处理.

2 数值建模

2.1 基于 H 法的控制方程

图 1 为高温超导磁悬浮系统示意图:

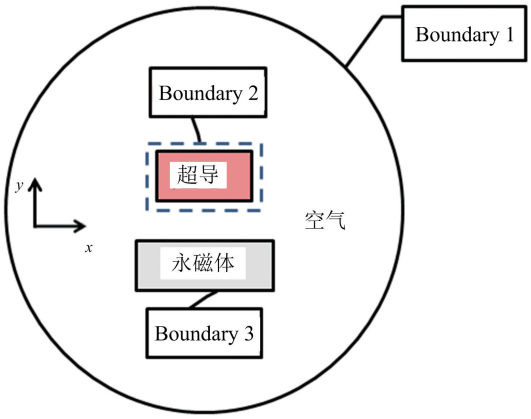


图 1　高温超导磁悬浮系统示意图

† gtma@swjtu.edu.cn

为建立超导控制方程，本文将建立一系列偏微分方程组，这一系列偏微分方程组拥有共同的因变量磁场强度 H.同时，一个子域与他相邻的子域会通过设定的边界条件互相作用，因此通过在外边界和内边界设定适当的边界条件，从而建立起不同的磁场状态.

高温超导体在永磁轨道上方处于准静态(运动速度实验条件下一般小于 1 mm/s)，因此位移电流可以忽略，则针对该模型有麦克斯韦方程：

$$\nabla\times E=-\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1}$$

而 J、E、B 都可以通过安培定律与本构关系从 H 得到：

$$J=\nabla\times H \tag{2}$$

$$E=\rho J \tag{3}$$

$$B=\mu H \tag{4}$$

将(2)(3)代入(1)中，则有：

$$\nabla\times(\rho\nabla\times H)=-\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{5}$$

上述方程中 $H=[H_x,H_y,H_z]$ 为磁场强度，$E=[E_x,E_y,E_z]$ 为电场强度，$J=[J_x,J_y,J_z]$ 为电流密度，ρ 为电阻率，μ 为磁导率，空气磁导率一般取 $\mu=4\pi\times10^{-7}$ H/m .如图 1 所示，高温超导磁悬浮轴承系统中磁场一般只存在于 $x-y$ 平面，即 $H=[H_x(x,y),H_y(x,y),0]$，那么由法拉第定律可知电流、电场只存在于 z 方向，即 $J=[0,0,J_z(x,y)]$，$E=[0,0,E_z(x,y)]$，那么：

$$J_z=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\end{bmatrix}=-\mu\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H_x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial H_y}{\partial t}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$E_z=\rho J_z \tag{8}$$

在空气中取电阻率 $\rho_{air}=1\ \Omega/m$，而超导电阻率由 $E-J$ 本构关系表征：

$$\rho_{HTS}=\frac{E_c}{J_c}\left|\frac{J}{J_c}\right|^{n-1} \tag{9}$$

其中 $E_c=1$ V/m；n 为常数，值与超导材料属性有关；J_c 为超导临界电流密度，由于超导临界电流密度依赖于磁场强度，因此超导临界电流密度对磁场的依赖通过经验公式表征：

$$J_c=\frac{J_{c0}}{\left(1+\left|\dfrac{\mu H}{B_0}\right|\right)^{\alpha}} \tag{10}$$

其中 J_{c0} 由材料确定，B_0 由外磁场确定，α 为 kim-like 常数，通常 $\alpha=0.7$.

将(8)(9)代入(7)即可得到控制方程.该方程可在 comsol 偏微分方程模块(PDE)下进行求解.

基于上述模型，超导的交流损耗以及悬浮力、导向力可由以下公式计算：

$$Q=\int E\cdot J\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{11}$$

$$F_y=\int J_z\cdot B_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{12}$$

$$F_x=\int J_z\cdot B_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{13}$$

2.2 边界条件

为节省结算时间，本模型只计算超导及周围薄空气层(即图 1 中 Boundary2 内区域)，利用间接耦合方法，即狄利克雷边界条件将永磁体磁场施加超导体.

Boundary1：环境磁场，整个系统所处环境的磁场.一般系统处于空气中，环境磁场可忽略不计.特殊背景下添加外加磁场可采用狄利克雷边界条件添加.

Boundary2：$H=H_{self}+H_{ext}$.

Boundary3：一般不对磁体边界进行约束.

其中 Boundary2 边界条件表示超导所处磁场，H_{self} 为超导产生的自场，可由毕奥萨伐定律计算而得[3]，H_{ext} 为外磁场，即磁体产生的磁场. H_{ext} 的大小与时间与空间位置有关，即 $H_{ext}=H_{ext}(x(t),y(t))$.此外在 Boundary2、Boudary3 上必须满足基本的磁场连续性定理，而在 Comsol 中磁场连续性是默认满足的，这也是利用 comol 进行仿真的优势之一.

3 模型验证

传统高温超导磁悬浮轴承一般采用高温超导块材作为悬浮材料，然而高温超导块材生产周期长、生产成本高，难以大规模生产[6].而第二代高温超导带材的易于大规模生产的特性使其具有代替块材作为悬浮材料的可能性，渐渐成为磁悬浮领域的研究热点.

研究表明,作为高温超导块材的替代,第二代高温超导带材在磁悬浮应用中具有非常广阔的应用前景[7-8].相比于高温超导块材,第二代高温超导带材在运用于磁悬浮时具有灵活多变的外形(对于堆叠带材而言),较大的临界电流密度、较低的生产成本、强磁场下的优异性能[9-10],并且可以在垂直移动下获得与块材一样稳定的悬浮力[11].

上述模型可以直接应用于高温超导块材轴承磁悬浮仿真.但基于高温超导带材悬浮的广阔应用前景与研究价值,本文采用高温超导带材磁悬浮系统来对模型进行验证.

高温超导带材中流动的电流均为由永磁体磁场引起的感应电流,无任何输入电流,因此当该模型用于高温超导带材磁悬浮仿真时需对每根带材上的电流进行约束,即令:

$$I_{\text{tape}} = \int_{S_{\text{tape}}} J_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \tag{14}$$

该约束可以通过 Comsol 中全局约束完成.

本文对以下高温超导带材磁悬浮系统进行了仿真计算,并通过与实验数据对比来对该模型的正确性进行了验证.

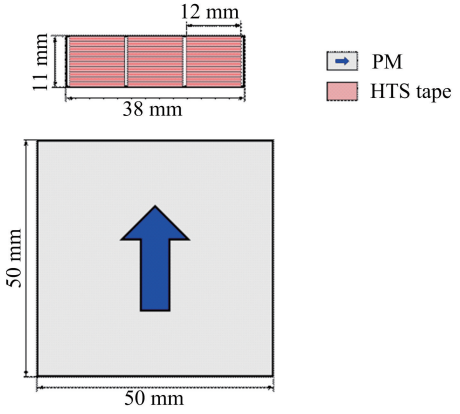


图 2 高温超导带材磁悬浮系统示意图

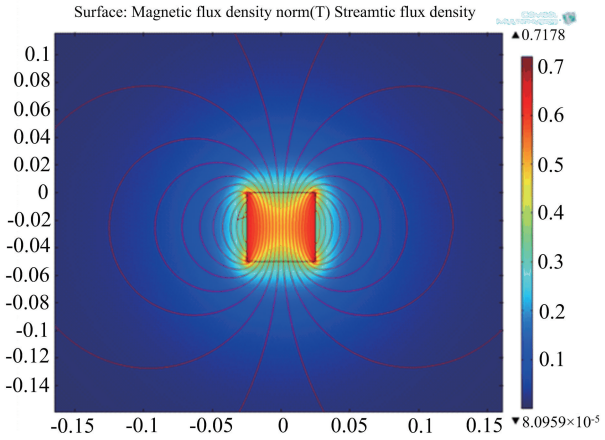
图中永磁轨道为 Ne-Fe-B 永磁,磁化强度 $M_0 = 7.8 \times 10^5$ A/m ,超导带材阵列包含三列带材堆栈,每列包含 10 层 YBCO 带材(superpower 公司 SF12050 型,$n = 38$,带材宽度 12 mm ,带材中超导层厚度为 1 μm).带材在长度方向为 67 mm.箭头为永磁体磁化方向.

如图 2 所示,该系统主要由永磁体与带材阵列组成.由于 H 法的实质是对以磁场强度 H 为自变量的一系列偏微分方程组进行求解.因此对于超导的建模必须在 comsol 的 PDE 模块中进行,而永磁体产生的外磁场则无法直接在 PDE 模块中进行仿真计算,因此对于永磁体磁场的计算通常有解析计算法与有限元仿真两种方法.此外由于超导带材外形具有极大的纵横比,对于带材的建模有真实尺寸模型与均值化模型两种.以下分别对永磁体与带材的建模进行介绍.

3.1 永磁体建模

前文已经提及空气磁场一般都被忽略,因此超导体所处的外磁场只由永磁体提供.因此需要分别计算超导产生的自场与永磁体产生的外磁场并将其共同作为 Boudary2 上的边界条件.

COMSOL 可以对多种物理场进行仿真计算.对于永磁体磁场的仿真可以在 AC/DC 模块下进行.定义永磁体外形后根据安培定律定义磁化强度 M_0 即可快速计算出其产生的磁场.下图为在 COMSOL Multiphysics4.3 中计算图 2 中永磁体磁场结果.



(图中横、纵坐标表示永磁体几何位置,单位为 m;云图颜色及数值表示磁场强度,单位为 T)

图 3 永磁体磁场分布

永磁体磁场也可采用解析法进行计算,较为简单快捷,但在实际应用中永磁轨道结构中常常存在铁磁性物质,解析法难以计算出其对磁场的影响,会对仿真结果准确性产生一定影响.

3.2 带材建模

(1)真实尺寸模型

高温超导带材又名涂层超导体,其内除超导外还存在银、铜、基底等涂层,图 4 为 Superpower 公司提供的超导线材结构.

在真实尺寸模型中一般将除超导层之外的其余涂层作为空气处理,图 5 为在 COMSOL

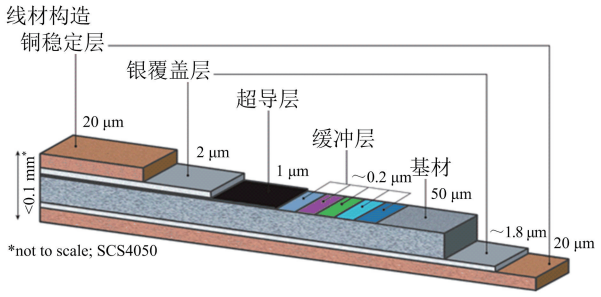


图 4　超导涂层带材结构

Multiphysics 中堆叠带材模型（1 μm × 12 mm）.由此可以直观看出超导层具有极大的纵横比.堆叠带材以外的区域均为空气，该模型外边界即为前文所述 Boudary2，其与堆叠带材之间的薄空气域可以避免在运用毕奥-萨伐尔定律计算超导自场时产生奇点.

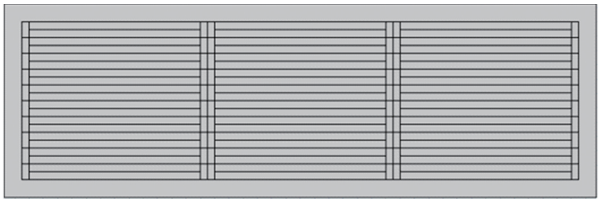


图 5　真实尺寸模型

为提高计算速度节约运算时间，一般可以采用如下对称模型：

前文已经提及超导层内的感应电流必须为零，但在对模型做对称处理时，对称轴所在的超导层内的感应电流不再为零.

(2)均值化模型

超导带材极大的纵横比意味着极密的剖分来保证仿真准确性，但这同时意味着计算时间的加长以及模型的不稳定性.因此真实尺寸模型仿真结果准确，但当带材堆叠层数较多时，所需时间长且不易收敛.均值化模型可以作为这一缺陷的解决方案，尤其当堆叠层数较多时，均值化模型可以作为一较为稳定、运算速度较快且结果较为准确的选择.下图为均值化过程示意图.

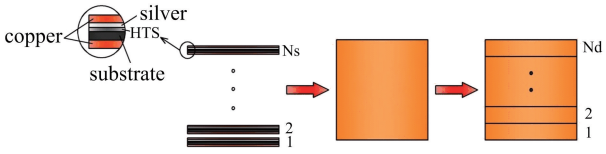


图 6　均值化过程

用 N_d 个等效块材来代替 N_S 层带材，通常来说 $N_d < N_S$.之前提及每层超导层都必须将其内感应电流约束为零，因此 N_S 层带材则必须有 N_S 个约束.当堆叠层数较多时需要耗费大量精力.采用均值化模型后约束个数由 N_S 减少至 N_d ，同时不再需要真实尺寸模型中极密的剖分，这就同时减少了运算时间.块材的等效临界电流密度为：

$$J_{c_eq} = J_{c_tape} \times f_{HTS} \tag{15}$$

其中 f_{HTS} 为带材堆栈中各层带材中超导层面积总和与带材堆栈总面积之比.

3.3 模型验证

上述系统堆叠层数只有十层，采用均值化模型意义不大，故采用真实尺寸模型进行仿真，并对仿真结果进行了验证，仿真与实验结果吻合度较高.

以下为两种不同冷却方式下验证结果：

(1)零场冷：带材在轨道上方 100 mm 处由液氮冷却进入超导态，沿 z 方向竖直向下运动至轨道上方 5 mm 处，再原路返回至初始位置.

(2)场冷：带材在轨道上方 20 mm 处由液氮冷却进入超导态，沿 z 方向竖直向下运动至轨道上方 5 mm 处，其次沿 z 方向竖直向上运动至轨道上方 100 mm 处，最后原路返回至 5mm 处.

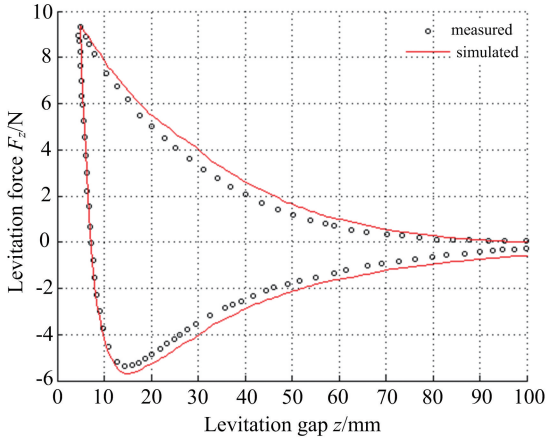


图 7　零场冷计算结果验证

4 讨　　论

4.1 网格

有限元仿真中网格的数量与质量很大程度上影响着仿真结果.一般来说网格数量越大、质量越好（即三角形网格越接近正三角形），仿真结果越精确，计算时间越长.同时网格形式的选择也极大程度地影响仿真结果.以下从网格形式与网格数量两方面

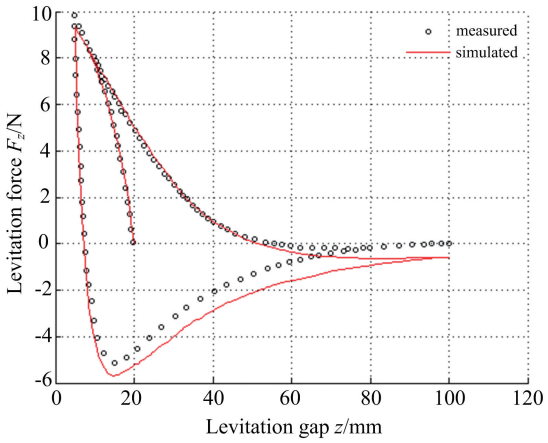


图 8 场冷计算结果验证

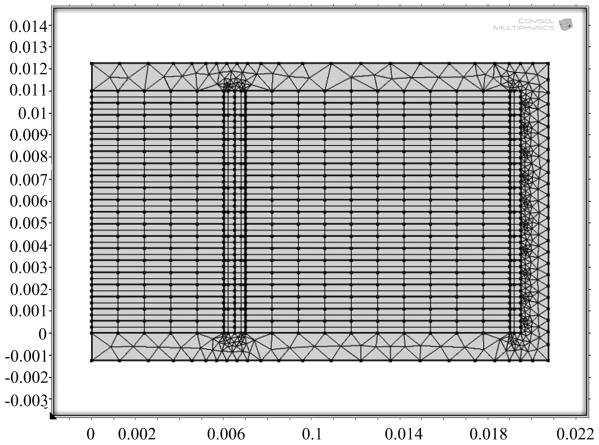


图 10 混合网格剖分结果

来讨论其对仿真结果的影响.

上述模型若采用三角网格进行剖分,由于带材的极大纵横比,软件为保证剖分质量,将自动调整剖分密度,所造成的结果便是剖分时长近 1 小时,并且产生 300 多万个网格,如图 9 所示.网格数量如此众多显然不适合进行仿真.

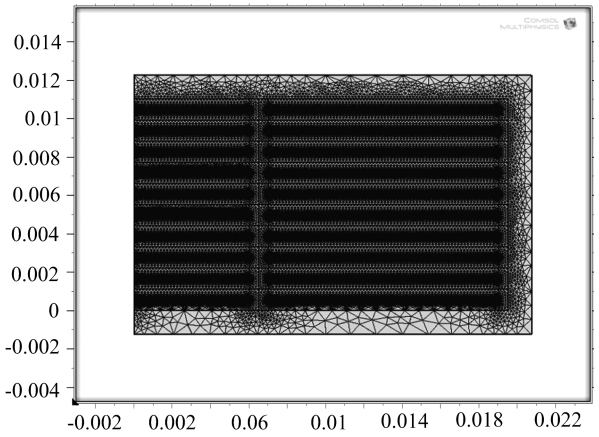


图 9 三角网格剖分结果

面对类似超导带材这种具有较大纵横比的模型,针对不同区域特点采用不同剖分形式是最佳的选择.空气域作为辅助区域且外形无特殊形状(指尖角、大纵横比矩形等),适合采用三角形网格;而映射型网格即长方形网格形状与带材形状类似,是带材区域较好的剖分形式选择.若按上述方案对模型进行剖分,结果如下图所示.剖分时长不到 1 秒,网格数 2021,且剖分质量较好.

映射型网格也存在不同形式.上图采用“固定单元数目”方式剖分,即将带材沿长度方向均分.此外还有“预定义分布形式”剖分,可以通过自定义使网格按一定比例不均匀分布,使重点部位处剖分更密,对带材而言边缘部分电流密度大中间部分电流密度较小,因此可以在边缘处采用更密的剖分.在实际仿真中可以视情况而定是否选用.

4.2 堆叠方式

对于传统的高温超导块材悬浮来说,由于生产条件制约,块材的形状一般都是固定的,一般都通过对永磁轨道进行优化设计从而达到最优悬浮效果.而采用带材代替块材后,由于堆叠带材外形具有极大的灵活性,因此除对轨道进行优化设计外,还可以考虑通过改变堆叠方式对悬浮性能进行优化.

上述模型中采用 3 列堆叠带材,每列 10 层,带材宽度 12 mm.带材宽度一般由生产商确定,在此不对带材宽度进行改变,仅考虑改变堆叠方式.在保证带材总量不变的情况下,将所有带材堆叠为 1 列(30 层),对悬浮力进行仿真,结果如下:

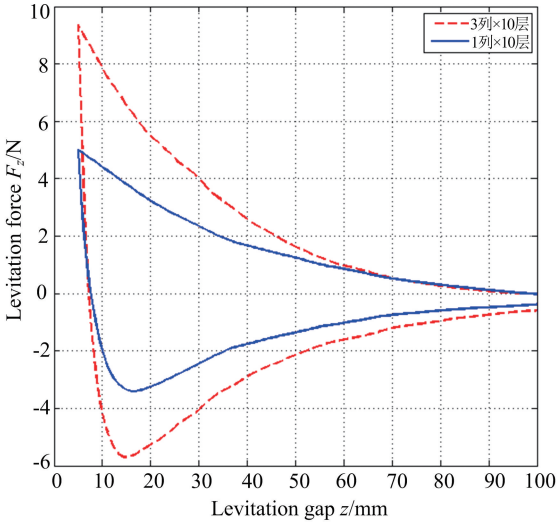


图 11 不同堆叠方式悬浮力对比

由上图可以明显看出，改变堆叠方式后获得的悬浮力减小，几乎是改变前的一半.究其原因，一方面因为随着高度增加，磁场强度较小，上层带材产生的悬浮力小，另一方面从 3 列改变为 1 列后带材阵列变窄，与下方的磁体相比只占磁体宽度不到 1/3，对磁体磁场利用率降低，因此建议布置带材时其阵列宽度应与永磁轨道宽度相匹配以提高磁场利用率.

5 结　　论

1.本文介绍了两周高温超导带材悬浮数值仿真方法：真实尺寸模型与均值化模型.真实尺寸模型仿真结果准确，但当带材堆叠层数较多时，所需时间长且不易收敛；均值化模型仿真结果在堆叠层数较多时可以获得较为准确的结果.本文通过与实验结果对比验证了真实尺寸模型计算准确性.

2.本文讨论了不同网格类型对于模型的影响.由于超导带材极大的纵横比，三角形网格剖分时间长、数量大，不利于模型快速计算，因此推荐采用映射型网格对超导带材子域进行剖分，采用三角形网格对空气子域进行剖分.

3.本文采用真实尺寸模型计算比较了 3 列（每列 10 层）与 1 列（30 层）超导带材这两种堆叠方式下的悬浮力，结果表明 3 列（每列 10 层）方式悬浮力远大于 1 列（30 层）方式悬浮力.建议布置带材时带材阵列宽度应与永磁轨道宽度相匹配以提高磁场利用率.

参　考　文　献

[1] Y. Kudou, H. Ueda, A. Ishiyama, *IEEE Trans. Appl.Supercon.*, **15**(2005), 2230.

[2] F.Grilli, S.Stavrev, Y, L. Floch,.C.-B. Marta, E. Vinot, I. Klutsch, G. Meunier, P. Tixador, B. Dutoit, *IEEE Trans. Appl. Supercon.*, **15**(2005), 17.

[3] F.Sass, G. G. Sotelo, R. D. A. Junior, F. Sirois, *Supercond. Sci.& Tech.*, **28**(2015), 125012.

[4] R.Brambilla, F. Grilli , L. Martini. Supercond, *Sci.& Tech.*, **20**(2007), 16.

[5] 芦逸云. 永磁轨道上方高温超导块材磁悬浮实验与仿真研究[D]. 西南交通大学, 2009..

[6] F.Sass, D. H. N. Dias, S. G. Goncalves, R. D. Andrade. *IEEE Trans. Appl. Supercon.*, **24**(2013), 1.

[7] M. W.Rupich, X. Li, S. Sathyamurthy, C. L. H. Thieme, K. D. Moranville, J. Gannon, S. Fleshler, *IEEE Trans. Appl.Supercon.*, **23**(2013), 6601205.

[8] H. Song, P. Brownsey, Y. Zhang, J. Waterman, T. Fukushima, D. Hazelton, *IEEE Trans. Appl. Supercon.*, **23**(2013), 4600806.

[9] F.Sass, D. H. N. Dias, G. G. Sotelo, R. D. Andrade, *Phys. Procedia.*, **36**(2012), 1008.

[10] F.Sass, D. H. N. Dias, G. G. Sotelo, R. D. Andrade, *IEEE Trans. Appl.Supercon.*, **23**(2013), 3600905.

[11] A.Patel, S. C. Hopkins, A. Baskys, V. Kalitka, A.Molodyk, B. A. Glowwacki, Supercond. *Supercond. Sci.& Tech.*, **28**(2015), 115007.

Numerical Study of High-temperature Superconductor Magnetic Bearing Using H-formulation

YANG Wenjiao LIU Kun MA Guangtong

State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 614202

Received date: 2017-07-02; accepted date: 2017-09-12

【Abstract】 This paper introduced a numerical model to study the performance of high-temperature superconductor magnetic bearing. The model was validated by the good agreement between the results of simulation and experiments in terms of levitation force. In this model the performance of high-temperature superconductor is expressed with H-formulation and the interaction between high-temperature superconductor and magnet is established by indirectly coupling. In addition, the influence of stack arrangement on the levitation force and the influence of mesh on computing time and accuracy are also discussed in the paper.

Keywords: H-formulation; High-temperature superconductor magnetic levitation; Finite element method

PACS: 7460,7490,0290