BCS-BEC 渡越过程超流费米气体在线性变化势中的集体激发

江楠梅[1,2],陈国镒[1,2],吉　亮[1,2],罗　超[1,2],张　亮[3,†],文　文[1,3†]

1.河海大学 常州校区基础学部,常州 213022;

2.河海大学 常州校区机电学院,常州 213022;

3.河海大学 理学院,南京 210098

收稿日期:2018-09-10;接收日期:2019-01-09

【摘要】 基于超流流体力学方程组和标度理论,数值研究了 Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)-Bose-Einstein Condensate (BEC)渡越过程中超流费米气体在线性减小谐振子势下的集体激发.详细研究了包括谐振子势频率线性减小的速度,减小到的幅度以及势阱各向异性参数对集体激发的影响.通过频谱分析和数据拟合,分别研究了各向同性势和各向异性势下在零振幅极限激发下所对应的模式,且数值计算得到的频率值在整个 BCS-BEC 渡越过程中与前期的理论结果符合得很好.该工作可以为后面超流费米气体集体激发的实验提供有益的理论参考.

关键词: 超流费米气体,BCS-BEC 渡越,集体激发

PACS: 67.85.Lm, 67.85.De

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.01.006

Collective Excitations of Superfluid Fermi Gases in The BCS-BEC Crossover in a Linearly Ramped Trap

JIANG NanMei[1,2], CHEN Guoyi[1,2], JI Liang[1,2],
LUO Chao[1,2], ZHANG Liang[3], WEN Wen[1,3]

1. *Department of Mathematics and Physics, Hohai University, Changzhou* 213022, *China*;

2. *College of Mechatronic Engineering, Hohai University, Changzhou* 213022, *China*;

3. *College of Science, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*

Received date: 2018-09-10; accepted date: 2019-01-09

【Abstract】 Based on the superfluid hydrodynamic equations and scaling theory, we numerically study the collective excitations of superfluid Fermi gases in the crossover from Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) superfluid to the Bose-Einstein Condensate (BEC) of molecules in a linearly ramped trap. The effects of controllable parameters, including the velocity and amplitude of the linearly ramped trap, and the anisotropy of the trap on the excitations are studied in detail. Through the spectral analysis and data fitting, the frequencies of the collective modes in the zero-amplitude limit induced by the linearly ramped isotropic and anisotropic traps along the BCS-BEC crossover are presented, respectively, which are in agreement with theoretical results previously obtained. Our work may provide a reference

* 国家自然科学基金(批准号:11105039),中央高校基本科研业务费专项资金(批准号:2017B18014),大学生创新创业训练计划(批准号:201810294089X)资助的课题.

† wenwen0emma@163.com

to experiments on collective excitations in the future.

Keywords: superfluid Fermi gas, BCS-BEC crossover, collective excitations

PACS: 67.85.Lm, 67.85.De

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.01.006

1 引　　言

集体激发对于研究多体系统中的相互作用效应是一个非常重要,也是一个直接的手段[1-2],因为实验相对容易精确测量. 自从在冷原子中实现玻色-爱因斯坦凝聚以及 Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)-Bose-Einstein Condensate (BEC)渡越过程中的超流费米气体,世界上很多实验小组都对其展开了大量集体激发方面的研究[3-9]. 为了得到集体激发模式,实验上采用突然增大[3,5]谐振子势阱的频率或关掉[6]谐振子势,然后保持一段时间后再恢复到原值;或是正弦改变磁场来转动势阱[4]. 为了激发高阶的集体模式,可以利用共振系统在相应的模式节点位置对准激发[9].

2018 年 1 月,华东师范大学武海斌实验小组在幺正费米气体绝热捷径的研究[10-11]中,提出精确地调控谐振子势阱频率[10-12],观测在一个线性减小谐振子势中费米气体的演化,发现气体的平均半径来回振荡,从而诱导强相互作用费米气体中的集体激发,并通过测量气体平均半径来确定激发模式的频率.

本文将基于超流流体力学方程组和标度理论数值研究 BCS-BEC 渡越过程中超流费米气体在线性减小的谐振子势中的集体激发,讨论了线性减小势中两个可调参数 t_f 和 b_f 对集体激发的影响,其中参数 t_f 是指谐振子势频率线性减小到初始频率 $1/b_f^2$ 经过的时间。通过研究各向同性和各向异性势阱,讨论了谐振子势各向异性参数对激发模式的影响. 数值结果表明,对于各向同性情况,随着 t_f 越来越大,体系越趋于缓慢变化,超流费米气体的激发为单模激发. 而对于各向异性情况,通过频谱分析发现,随着各向异性参数越来越偏离 1,也就是气体越趋向于一维或两维系统,在长轴方向的激发是单模的慢变振荡,而在短轴方向是双模混合振荡,一个模式是与长轴相同频率的慢变振荡但振荡相位相反,另一个是快变振荡. 这些模式的频率会随着 b_f 变大而越来越小,通过拟合在 $b_f=1$ 最小极限下的数据,发现最低频率所对应的模式,模式频率在 BCS-BEC 过程中的数值结果和过去文献中的解析结果符合得很好. 该结果不仅对今后集体激发实验有参考价值,所用的标度理论方法还适用于其他含时演化势阱中超流费米气体演化.

2 理论模型

我们考虑两分量费米气体,当温度足够低,费米子配对凝聚形成超流态. 当两分量费米子间相互作用是弱相互作用,形成 BCS 超流;当相互作用是排斥相互作用,存在束缚态,形成分子的 BEC;在幺正极限形成标度不变的幺正费米超流.整个 BCS-BEC 渡越过程中超流费米气体的演化可以用超流流体力学方程组描述[13-15]:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\vec{v})=0 \tag{1a}$$

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2+\mu(n)+V_{ext}(\vec{r},t)\right)=0 \tag{1b}$$

其中 $n(\vec{r},t)$ 原子数密度,则粒子总数为 $N=\int n(\vec{r},t)d\vec{r}$,$\vec{v}(\vec{r},t)$ 是超流速度. $V_{ext}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}m[\omega_\perp^2(t)r^2+\omega_z^2(t)z^2]$ 是轴对称 ($r^2=x^2+y^2$) 的随时间变化的谐振子势, m 是单个费米子质量. 态方程 $\mu(n)$ 描述整个 BCS-BEC 过程中费米子间的相互作用[16].根据 Gibbs-Duhem 关系和局域密度近似, 态方程表示为 $\mu(n)=\partial[n\varepsilon(n)]/\partial n$, 其中 $\varepsilon(n)$ 是无外势下单个粒子的能量.引入关系式 $\varepsilon(n)=\frac{3}{5}E_f\sigma(\eta)$,其中 $E_f=\hbar^2k_f^2/(2m)$ 是费米能量,则态方程可以表示为 $\mu(n)=E_f[\sigma(\eta)-(\eta/5)\partial\sigma(\eta)/\partial\eta]$. 引入无量纲相互作用参数 $\eta\equiv1/(k_fa_f)$ 可以刻画不同的超流区域:BCS 区域 ($\eta\leqslant-1$), BEC 区域 ($\eta\geqslant1$), BCS-BEC 渡越过程 ($-1<\eta<1$).特别地, 当粒子间散射长度发散,气体处于幺正极限 ($\eta=0$).为了后面解析求解方便,我们对态方程进一步采用多方近似[17]

$$\mu(n)=\mu_0\left(\frac{n}{n_0}\right)^\gamma \tag{2a}$$

$$\gamma\equiv\gamma(\eta)=\frac{n}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial n}=\frac{\frac{2}{3}\sigma(\eta)-\frac{2\eta}{5}\sigma'(\eta)+\frac{\eta^2}{15}\sigma''(\eta)}{\sigma(\eta)-\frac{\eta}{5}\sigma'(\eta)} \tag{2b}$$

其中 γ 为多方参数. 在 BEC 极限 $\gamma=1$, 在 BCS 极限和幺正极限 $\gamma=\frac{2}{3}$. μ_0 和 n_0 分别表示参考化学势

和粒子数密度[17].迄今还没有一个完整的理论可以给出整个渡越过程中 $\sigma(\eta)$ 解析表达式，为了让结果更接近实验结果，我们采用基于法国 ENS 小组的实验数据[18]拟合出来的解析式[19].

为了研究气体在谐振子势中的演化，我们利用标度理论. 对于粒子数密度分布采用如下的标度形式[20,21]：

$$n(\vec{r},t)=\frac{1}{b_x(t)b_y(t)b_z(t)}n^0\left(\frac{x}{b_x(t)},\frac{y}{b_y(t)},\frac{z}{b_z(t)}\right), \tag{3}$$

其中 n^0 是平衡态时粒子数密度的分布.从(3)式中我们可以看到粒子数密度 $n(\vec{r},t)$ 随时间的变化包含到了标度参数中 $b_i(t)$，$i=x,y,z$.为了满足连续性方程(1a)，超流速度在 i 方向上分量为 $v_i=(r_i/b_i)(db_i/dt)$.将粒子数密度和超流速度的标度形式代入方程(1b)，可以得到标度参数满足的耦合微分方程组,在轴对称坐标下的形式为[22]：

$$\frac{d^2b_\perp(t)}{dt^2}+b_\perp(t)\omega_\perp^2(t)-\frac{\omega_\perp^2(0)}{b_\perp^{2\gamma+1}(t)b_z{}^\gamma(t)}=0 \tag{4a}$$

$$\frac{d^2b_z(t)}{dt^2}+b_z(t)\omega_z^2(t)-\frac{\omega_z^2(0)}{b_\perp^{2\gamma}(t)b_z^{\gamma+1}(t)}=0 \tag{4b}$$

其中 $\omega_\perp(0)=\omega_{\perp 0}$ 和 $\omega_z(0)=\omega_{z0}$ 分别表示在径向和纵向谐振子势在初始时候 $t=0$ 的频率，$\omega_\perp(t)$ 和 $\omega_z(t)$ 表示 $t>0$ 的频率.

我们考虑超流费米气体在一个线性减小的谐振子势阱中的演化,频率在 $i=\perp,z$ 方向上随时间的表达为[10,11]：

$$\omega_i(t)=\begin{cases}\dfrac{(1-b_f^2)\omega_i(0)}{b_f^2t_f}t+\omega_i(0), & 0\leqslant t\leqslant t_f\\ \omega_i(0)/b_f^2, & t>t_f\end{cases} \tag{5}$$

其中，t_f 是势阱减小的时间，b_f 是势阱减小的振幅，即势阱频率在 t_f 时间内从初始值 $\omega_i(0)$ 线性减小到 $\omega_i(0)/b_f^2(i=\perp,z)$，并在此后保持不变，该过程如图 1 所示.

为了研究超流费米气体在该线性变化势下的演化,我们数值求解标度参量方程组(4),则气体在势阱中随时间振荡的平均半径 $\langle R_i(t)\rangle=1/N\int d\vec{r}\,n(\vec{r},t)r_i$，$(i=z,\perp)$ 与初始时刻平均半径 $\langle R_i(0)\rangle$ 的比值可以由标度参量 $\langle R_i(t)\rangle=b_i(t)\langle R_i(0)\rangle$ 得到。

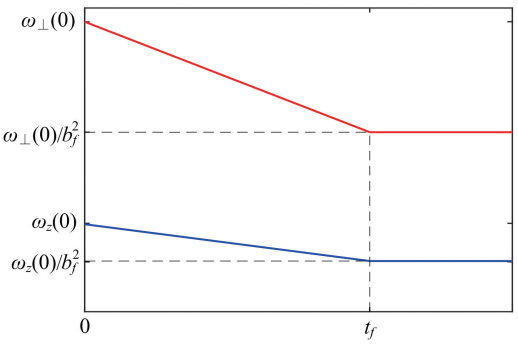

图 1　径向和纵向谐振子势阱频率随时间线性减小
其中 t_f 和 b_f 是控制势阱变化的两个可调参数.

3　数值结果与讨论

3.1　各向同性势阱

我们首先讨论各向同性势的情况,即各个方向频率一致 $\omega_\perp(t)=\omega_z(t)=\omega(t)$,初始频率为 $\omega(0)=\omega_0$. 各向同性下标度方程由于 $b_\perp(t)=b_z(t)=b(t)$ 约化为一个常微分方程. 图 2(a)给出幺正极限下($\eta=0,\gamma=\frac{2}{3}$),不同 $\omega_0t_f=2$ 和 100 以及 $b_f=3$ 下费米气体平均半径 $\langle R(t)\rangle=b\langle R_0\rangle$ 随时间的变化,其中 $\langle R_0\rangle=\langle R(0)\rangle$ 为初始时刻气体的半径. 图 2(a)虚线是数值结果,实线为拟合的正弦函数. 对比各自拟合的正弦函数，我们可以发现随着 t_f 越来越大,线性减小势阱下费米超流的半径变化越来越接近拟合的正弦函数,也越接近单模激发,这是因为 t_f 越大越接近缓慢变化. 图 2(b)我们研究了在 $\omega_0t_f=100$ 足够大,超流体单模激发与 b_f 间的关系. 从图中可以发现随着 b_f 增大，也就是说势阱减小的越厉害,振荡的周期和振幅都随着变大. 图 3(a)中我们将振荡的周期 ω_0T ($T=2\pi/\omega$) 随 b_f 变化画出,其中正方形表示幺正极限下的数值结果,虚线为拟合曲线,可以发现振荡周期与 b_f 呈二次增长,拟合曲线与纵坐标的交点就是 $b_f=1$ 极限下,也就是无穷小激发模式的周期.

我们还研究了不同超流区域的情况,其中圆形表示 BCS 区域($\eta=-0.5,\gamma=0.59$),三角形表示 BEC 极限($\gamma=1$). 和在幺正极限下一样,激发模式周期与 b_f 都是呈二次函数关系. 我们将极限值 $b_f=1$ 下费米气体振荡角频率 ω/ω_0 在不同超流区域在图 3(b)中画出,实心圆是我们的数值结果,实线是

各向同性超流费米气体呼吸模式的频率[23] $\omega=\omega_0\sqrt{3\gamma+2}$，可以发现我们的数值结果和理论结果符合得很好. 我们可以得到这样的结论：当 t_f 很大时，在线性变化势中，无穷小激发下对应的就是呼吸模式.

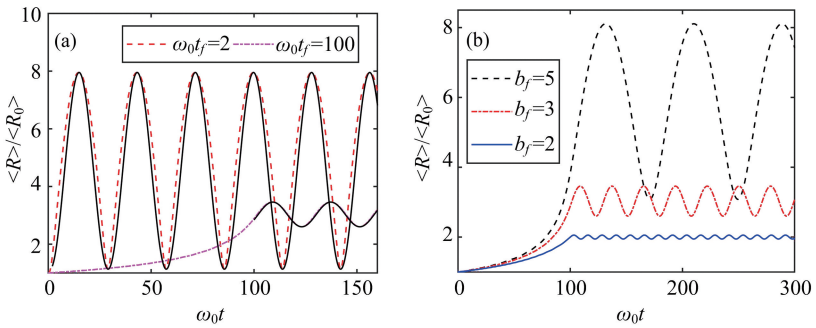

图 2　(a)各向同性超流费米气体在幺正极限($\eta=0,\gamma=\frac{2}{3}$)下，平均半径在线性变化势中随时间的变化，实线是正弦拟合函数；(b) $\omega_0 t_f=100$ 下，超流费米气体在幺正极限下平均半径对于不同 b_f 随时间的变化

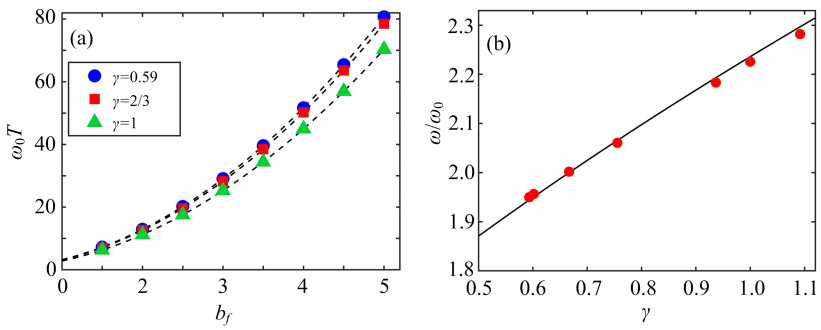

图 3　(a) 各向同性超流费米气体在势阱变化很缓慢下，$\omega_0 t_f=100$，振荡周期 $\omega_0 T$ 随 b_f 的变化，其中虚线是拟合的二次函数；(b) $b_f=1$ 极限下费米气体振荡频率随 γ 的变化，其中实线为各向同性超流费米呼吸模频率的理论值 $\omega/\omega_0=\sqrt{3\gamma+2}$.

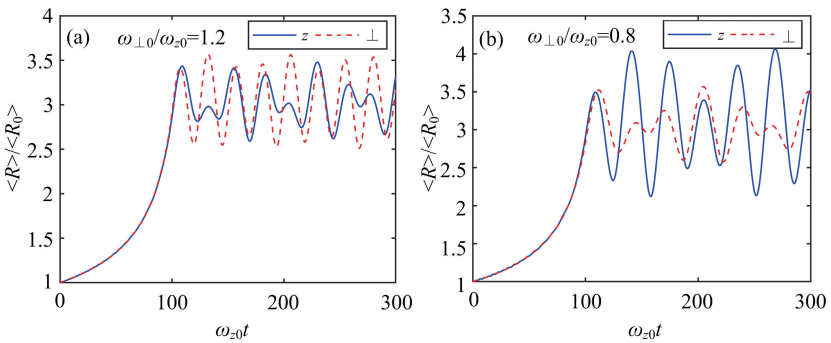

图 4　各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}$ 接近 1 情况下，幺正超流费米气体纵向和径向平均半径随时间的变化其中 $\omega_{z0} t_f=100$，$b_f=3$. (a)雪茄型 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=1.2$；(b)盘型 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=0.8$.

3.2　各向异性势阱

接下来我们讨论轴对称各向异性势阱(即各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}\neq 1$)中超流费米气体的集体振荡，并重点讨论势阱缓慢变化(即 $\omega_{z0} t_f=100$)下. 图 4(a)和 4(b)分别给出在雪茄型 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=1.2$ 和盘型 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=0.8$ 费米气体在幺正极限下径向⊥和纵向 z 平均半径随时间的变化，其中 $b_f=3$.从图中我们可以发现，不同于各向同性的情况(见图 2(b))，即使将设置 t_f 非常大时，超流费米气体在径向和纵向半径随时间的变化都不是单个正弦变化，而是很多模式的混合，后面我们可以发现这是因为各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}$ 接近 1，径向和纵向模式有

很强的耦合.

进一步我们研究费米气体在各向异性参数远离1时的情况,当 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} \gg 1$ 雪茄型费米气体会接近一维系统,而当 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} \ll 1$ 盘型接近为二维系统. 图5(a)和5(b)分别给出超流费米气体在幺正极限下 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=10$ 和 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=0.1$ 下径向和轴向半径随时间的变化;从图中我们可以发现当各向异性参数远离1时,费米气体的振荡在长轴方向,也就是说对于雪茄型图5(a)是纵向,而盘型图5(b)是径向,气体的振荡是慢变量,且为单模正弦函数. 而在短轴方向,是双模振荡混合,不仅包括一个快振荡的模式,还包括一个与长轴方向的振荡相位相反,频率相同的慢振荡模式.

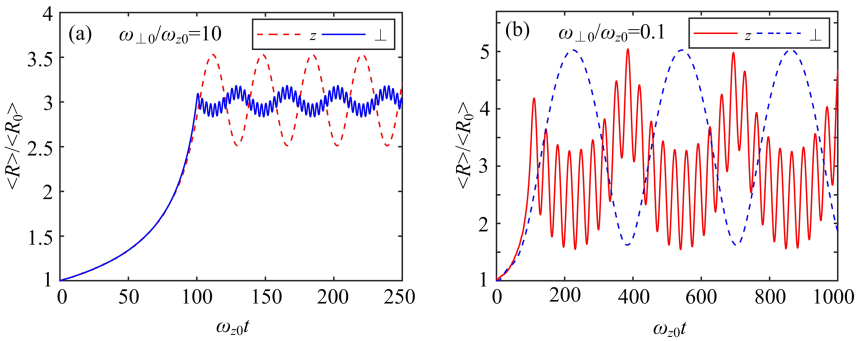

图5 各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}$ 远离1情况下,幺正费米气体纵向和径向平均半径随时间的变化
其中 $\omega_{z0}t_f=100$,$b_f=3$. (a)细长极限 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=10$. (b)扁平极限 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=0.1$.

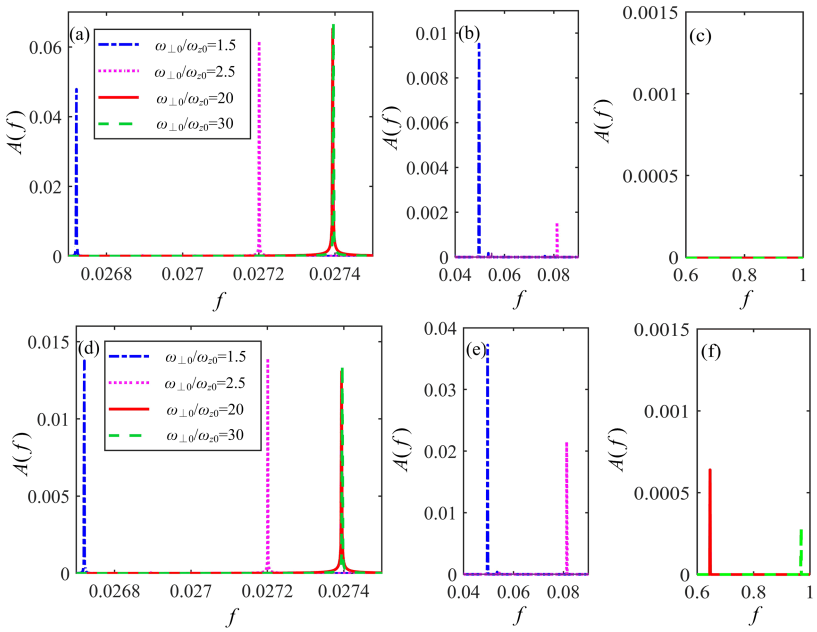

图6 雪茄型超流费米气体在幺正极限下纵向振荡(a)、(b)、(c)和径向振荡(d)、(e)、(f)的频谱分析

为了研究各向异性参数是如何影响激发模式,我们对不同参数下激发的振荡做频谱分析. 图6给出的是雪茄型 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}>1$,$b_f=3$,$\omega_{z0}t_f=1000$ 情况,其中(a),(b),(c)对应的是纵向振荡频谱,(d),(e),(f)对应的是径向振荡频谱. 从图中我们可以发现,无论是纵向还是径向都包含两个激发模式,且两个方向上的模式频率相同.对于纵向激发,图6(a)对应的是频率小的模式,图6(b)(c)对应的是频率大的模式.可以发现随着各向异性参数从 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0}=1.5$ 增大到30,图6(a)模式的频率越来越大,直到各向异性参数很大,频率趋向一个极限值.而对于频率大的模式,图6(b)同样显示频率会随着各向异性参数越来越大.值得注意的是当各向异性参数非常大,该模式会消失,见图6(c). 对于径向激发,图6(d)显示的是频率小的模式,图6(e)(f)对应是频率大的模式. 同样随着各向异性参数增大模式的频率越来越

大,频率小的模式的频率会趋于一个极值(图 6(d)),而频率大模式(图 6(e)(f))的频率会越来越大且该模式会一直存在,这不同于纵向的激发.以上的分析可以用来解释图 5 的数值结果,即在纵轴方向是单模激发,而横轴方向是双模混合.

图 7 我们给出各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} < 1$、$\omega_{z0}t_f = 10000$、$b_f = 3$ 情况下的频谱分析. 和图 6 的情况一致,同样无论纵向还是径向的激发都包含两个模式,且纵向和径向的两个模式的频率一样.随着各向异性参数的增大,频率越来越大, 且频率相差的间隔越来越小.从峰的振幅我们可以看出模式之间是如何耦合和转换的. 对于纵向振荡(图 7(a)和(b)),随着各向异性参数越来越大,两个激发模式的峰振幅越来越小;对于径向振荡(图 7(c)和(d)),其中一个模式的峰振幅越来越小,而另外一个模式的峰越来越大,从而导致当各向异性参数足够小时,另外一个模式消失.我们可以发现当 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} \ll 1$ 体系趋向两维系统,纵向振荡趋于一个值(见图 7(b)),而径向振荡其中一个模式消失(见图 7(d)). 这样的结果和图 5(b)的数值结果是一致的.

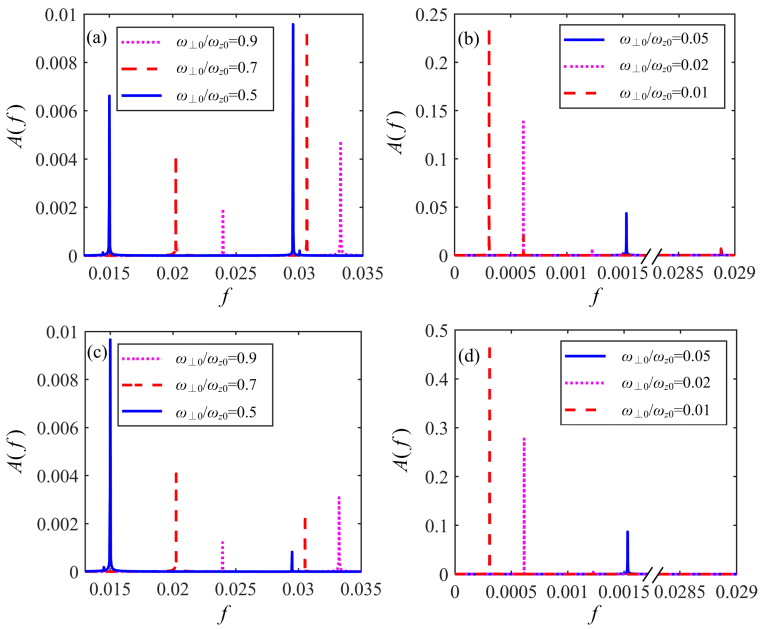

图 7　盘型超流费米气体在幺正极限下平均半径振荡的频谱分析,其中(a)和(b)对应纵向方向,(c)和(d)对应径向方向

从频谱分析中我们可以发现,对于图 5(a)情况纵向单模振荡的频率对应的就是图 6(a)中重合峰的频率,而横向振荡的两个模式的频率其中一个峰的位置和纵向单模一致,代表包络变化的频率,见图 6(d), 另外一个模式的频率较大,是快振荡的频率. 同理,对于图 7 我们也可以记录这样相应的两个频率.我们分别研究了这两个频率与 b_f 的关系,仍然是满足二次函数的关系,并且如图 3(b)那样拟合出 $b_f = 1$ 的极限值.

最后,我们给出了超流费米气体当各向异性参数 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} = 20$ 和 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} = 0.2$ 下快振荡和慢振荡在 $b_f = 1$ 极限下角频率在整个 BCS-BEC 的数值结果.图 8(a)实线给出的是雪茄型超流费米气体在长条极限下 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} \gg 1$ 低阶单极子模频率 $\omega = \omega_{z0}\sqrt{(3\gamma+2)/(\gamma+1)}$ 的理论值[24,25],该模式对应的是纵向和径向反相振荡. 图 8(b)给出的是高阶单子模的理论值 $\omega = \omega_{\perp 0}\sqrt{2\gamma+2}$ [24,25],该模式对应的是纵向和径向同相位振荡.图 8(c)实线给出的扁盘极限 $\omega_{\perp 0}/\omega_{z0} \ll 1$ 下,高阶单极子呼吸模的理论值 $\omega = \omega_{z0}\sqrt{\gamma+2}$ [24,25],图 8(d)实线是低阶单极子模频率的理论值[24,25] $\omega = \omega_{\perp 0}\sqrt{(6\gamma+4)/(\gamma+2)}$. 可以发现我们的数值结果和理论符合得很好,从而得到这样的结论: 对于线性变化势阱中的各向异性超流费米气体,在变化很缓慢和无限小激发下,雪茄型在各向异性参数很大时,纵轴方向激发低阶单极子模,而在径向激发的是低阶单极子模和高阶单极子模的混合;盘型在各向异性参数很小时,径向方向激发的是高阶单极子模,而在纵轴方向是高阶单极子和低阶单极子模的混合.

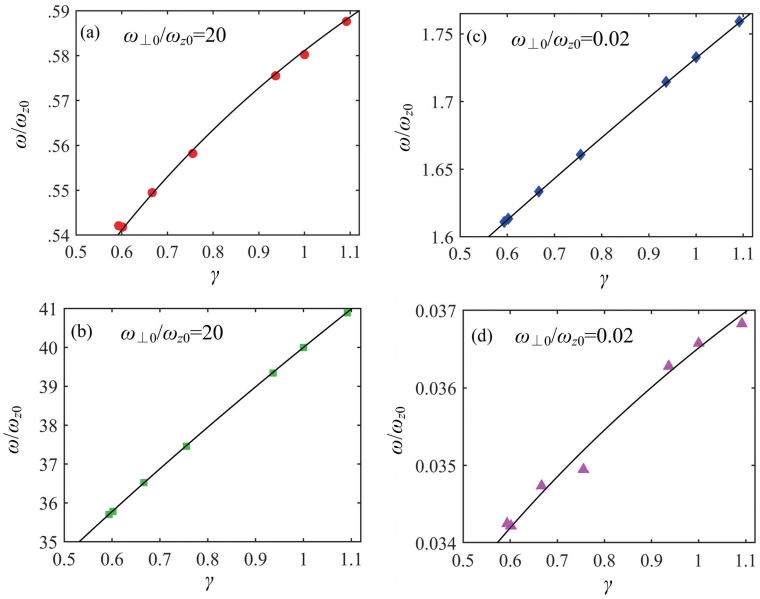

图 8　各向异性超流费米气体在势阱变化非常缓慢和无穷小下激发模式在整个 BCS-BEC 渡越过程中的角频率

其中实线对应在长条极限下(a)低阶单极子模,(b)高阶单极子模;盘型极限下(c)高阶单极子模和(d)低阶单极子模理论值.

4　结　　论

本文基于超流流体力学方程组和标度理论,数值研究了当谐振子势线性减小下,BCS-BEC 渡越过程中超流费米气体的集体激发. 研究表明,当势阱变化缓慢,即 t_f 足够大,各向同性超流费米气体激发的是单模模式,且激发模的周期和振幅随 b_f 增大而增大,并且周期与 b_f 呈二次关系,通过拟合函数我们可以得到 $b_f=1$ 无穷小激发下的周期,发现在这个极限下正是呼吸模;而对于各向异性,我们发现在长轴方向激发的是单极子模,而短轴方向是高阶和低阶单极子模的混合. 该理论结果希望为后面超流费米气体的集体激发实验提供有益的参考.

参　考　文　献

[1] F. Dalfovo, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999), 463.
[2] I. Bloch, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 885.
[3] M.-O. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 988.
[4] D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 420.
[5] F. Chevy, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), 250402.
[6] J. Kinast, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), 150402.
[7] M. Bartenstein, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), 203201.
[8] A. Altmeyer, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), 040401.
[9] M.K. Tey, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013), 055303 .
[10] S. Deng, *Phys. Rev. A* **97** (2018), 013628.
[11] S. Deng, *Sci. Adv.* **4** (2018), eaar5909.
[12] S. Deng, *Science* **353** (2016), 371.
[13] S. Giorgini, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 1215.
[14] C. Menotti, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002), 250402.
[15] W. Wen, *Phys.Rev.A* **77** (2008), 033623.
[16] N. Manini, *Phys. Rev. A* **71** (2005), 033625.
[17] W. Wen, *Phys. Rev. B.* **81** (2010), 014528.
[18] N. Navon, *Science* **328** (2010), 729.
[19] W. Wen, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **50** (2017), 035301.
[20] Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), 5315.
[21] Y. Kagan, *Phy. Rev. A* **55** (1997), R18.
[22] 张亮, 文文, 马晓栋, 原子与分子物理学报 **35** (2018), 803.
[23] H. Heiselberg, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), 040402.
[24] G.E. Astrakharchik, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 030404.
[25] H. Hu, *Phys.Rev.Lett.* **93** (2004), 190403.