

两维有限深势阱中 BEC 的稳定性分析

简粤^{1,2}, 祁鹏堂¹, 李伟¹, 张培增¹, 郑小平^{1,3†}

1. 兰州工业学院 基础学科部, 甘肃 兰州 730050;

2. 西北师范大学 物理与电子工程学院, 甘肃 兰州 730070;

3. 兰州城市学院, 甘肃 兰州 730000

收稿日期: 2019-03-18; 接收日期: 2019-06-14

【摘要】 研究两维轴对称有限深势阱中 BEC 的稳定性, 利用变分法分别讨论了系统的基态和激发态特性. 研究表明系统存在塌缩态、束缚态和扩散态三种状态, 并计算出系统状态发生变化的耦合常数的两个临界值, 发现势阱的形状与系统的稳定性紧密相关. 同时在激发态下进一步讨论了原子间相互作用发生周期性调制的 BEC 的动力学特性, 分析发现有限深势阱中 BEC 的塌缩可以通过周期性调制散射长度来控制. 本文最后讨论了涡旋态下 BEC 的稳定性, 发现系统的塌缩点由于涡旋态的存在而降低.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚; 有限深势阱; 耦合常数; 塌缩; 束缚态; 扩散态

PACS: 0415.6

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.03.003

The Stability of BEC in a Two-dimensional Finite Potential Well

JIAN Yue^{1,2}, QI Pengtang¹, LI Wei¹, ZHANG Peizeng¹, ZHEN Xiaopin^{1,3†}

1. *Department of Basic courses, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China;*

2. *College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;*

3. *Lanzhou City University, Lanzhou, 730000, China*

Received date: 2019-03-18; accepted date: 2019-06-14

【Abstract】 The stability of BEC in a two-dimensional axisymmetric finite deep well is studied. The ground state and excited state of the system are discussed by using variational method. The results show that there are three states of collapse state, bound state and diffusion state, and the two critical values of coupling constant of the system state change are calculated. The state of the system is closely related to the shape of the potential well. At the same time, the dynamic characteristics of BEC which is periodically modulated by the interaction between atoms are further discussed in the excited state. It is found that the collapse of BEC in a finite deep well can be controlled by modulating the scattering length periodically. Finally, the stability of BEC in the vortex state is discussed. Because of the existence of the vortex state, the collapse point of the system decreases.

Keywords: Bose-Einstein condensate; finite potential well; coupling constant; the collapsing state; the bound state; the diffusion state

* 甘肃省自然科学基金(批准号:18JR3RA230,223,217)、甘肃省高等学校科研项目(批准号:2018D-19)、兰州市人才创新创业项目(批准号:114)、甘肃省2019年度重点人才项目、兰州工业学院“开物”科研创新团队支持计划资助(编号:2018KW-06)、兰州工业学院青年科技创新项目(编号:17K-018)资助的课题.

† 763064753@qq.com

PACS: O415.6

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.03.003

Reference method: JIAN Yue, QI Pengtang, LI Wei, ZHANG Peizeng, ZHEN Xiaopin, Low. Temp. Phys. Lett. **41**,0164 (2019)

1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚(简称 BEC)作为物质的第五态自 1995 年在实验上实现以来引起了人们研究的热潮^[1-6]. 平均场理论成功的模拟了稀薄气体的 BEC 的动力学特性^[7], 并且关于 BEC 气体波函数的非线性薛定谔方程能够准确描述零温度下凝聚体的基态和激发态性质^[8-11]. 极低温下的 BEC 通常用非线性平均场 Gross-Pitaevskii (G-P) 方程来描述^[12], 方程中的非线性项来源于粒子间的相互作用, 其与 BEC 的稳定性密切相关. S 波散射长度在描述超低温下原子间相互作用中起着重要作用, 最近发展的实验技术使得利用外磁场有效地控制散射长度的大小成为可能, 这种散射长度的调制可以通过在 Feshbach 共振附近操纵外部磁场来实现^[13], 并且已经在 BEC 的不同研究中得到应用^[14-20].

通常凝聚体是在抛物线阱中形成, 但近年来人们越来越关注有限深势阱中 BEC 的性质^[21-24]. 有限深势阱在实验上可以通过降低光阱中的激光强度或减小磁阱中的电流产生, 在理论上以指数形式表征. 一些结果表明, 有限深势阱中也存在束缚态, 并且由于宏观量子隧道效应, 有限深势阱中凝聚体的动力学性质主要受非线性相互作用的控制. 因此讨论有限深势阱中 BEC 的稳定性是很有意义的, 这将为平均场模型提供更严格的检验.

本文讨论两维轴对称有限深势阱中凝聚体的稳定性, 首先简单的介绍了平均场模型, 其次利用变分法研究了系统的基态性质, 然后利用含时的变分方式来研究激发态下凝聚体的稳定性, 并进一步讨论了周期性调制原子间相互作用时 BEC 的动力学特性, 最后研究涡旋态下 BEC 的稳定性.

2 非线性平均场模型

平均场理论可以很好的描述稀薄的 BEC 气体. 在平均场理论的框架下, 由于囚禁在势阱中的 BEC 的原子间相互作用力远小于原子平均距离, 则这样的系统可以用 Gross-Pitaevskii(G-P) 方程来模拟相关性质, 并在一定条件转化为非线性薛定谔方程. 即在零温下, 描述 BEC 波函数的自洽的平均场非线性薛定谔方程可以表示为:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi + \bar{V} \Psi + U |\Psi|^2 \Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad (1)$$

式中 Ψ 为系统的波函数, M 为原子质量. \bar{V} 为囚禁势, 在实验上可通过磁势阱或者激光产生. $U = \left(\sqrt{\frac{8\pi\hbar^2\omega_z}{M}} \right) aN$ 为耦合常数用于描述凝聚体中原子间相互作用, 其中 ω_z 为震荡频率, a 为 S 波散射长度, N 为原子数. 若 a 为正值, 则说明凝聚体具有排斥的相互作用, 若 a 为负值, 则凝聚体具有吸引相互作用. 将凝聚体装载在一个两维轴对称的有限深势阱中, 通过适当的变换可以将方程(1)进行无量纲化, 其径向部分的无量纲形式为:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r, t) + V(r) \psi(r, t) + g |\psi(r, t)|^2 \psi(r, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) \quad (2)$$

$$V(r) = -V_0 \exp(-\alpha r^2) \quad (3)$$

$$2\pi r \int_0^\infty |\psi(r, t)|^2 dr = 1 \quad (4)$$

其中 $\psi(r, t)$ 表示归一化的 BEC 波函数, g 为耦合常数, 其在 BEC 的稳定性中起着重要的作用, 若 $g > 0$, 凝聚体原子间相互作用为斥力, 在很强的斥力下系统随时间演化吸引力会变得非常的弱, 系统最终发生扩散; 若 $g < 0$, 凝聚体原子间相互作用为引力, 若原子间的引力很强, 最终会导致系统发生塌缩. $V(r)$ 表征有限深势阱, V_0 为势阱深度参量, α 为势阱宽度参量, 随着 α 的增大, 势阱越变越窄. 方程(4)为归一化条件.

3 基态

为研究两维轴对称的有限深势阱中 BEC 的基态特性, 将 $\psi(r, t) = \psi(r) \exp(-iut)$ 代入(2)式可得系统的定态方程:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r) + V(r) \psi(r) + g |\psi(r)|^2 \psi(r) = u \psi(r) \quad (5)$$

式中 u 为系统的化学势. 利用变分法, 采用高斯型试探波函数 $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-r^2/2\rho^2}$ (其中 ρ 代表波包半径) 作为方程(5)的解, 并将其代入系统的基态能量方程

$$E = 2\pi r \int_0^\infty \left| \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right|^2 + V(r) |\psi(r)|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(r)|^4 dr \quad (6)$$

得到系统的能量

$$E = \frac{1}{2\rho^2} + \frac{g}{4\pi\rho^2} - \frac{V_0}{1+\alpha\rho^2} \quad (7)$$

通过 $\frac{\partial E}{\partial \rho} = 0$, 可以得到系统处于稳态时的耦合常数 g 的表达式:

$$g = 2\pi \left(\frac{2V_0\alpha\rho^4}{(1+\alpha\rho^2)^2} - 1 \right) \quad (8)$$

并且通过方程(5)可以计算出系统的化学势 u :

$$u = -\frac{1}{2\rho^2} + \frac{V_0(\alpha\rho^2 - 1)}{(1+\alpha\rho^2)^2} \quad (9)$$

若系统具有吸引的原子间相互作用 ($g < 0$), 当 g 减小到一定程度时, 系统会发生塌缩, 这是研究两维系统所特有的情况, 称作汤森孤子 (Townes soliton)^[25], 此临界值称为塌缩耦合常数 g_{coll} . 由 (8) 和 (9) 式可知, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, $u \rightarrow -\infty$, $g_{\text{coll}} = -2\pi$. 当 $g > g_{\text{coll}}$ 时, 系统能量存在极小值, 系统处于凝聚体完全囚禁在势阱中的束缚态, 随着 g 的增大, 原子间相互作用增强, 当其增大到一定程度时, 系统能量极小值不存在, 系统处于不稳定的扩散态. 系统从束缚态向扩散态转变时, 所对应的 g 称为最大耦合常数 g_{max} . 图 1 绘制了 $g - \alpha$ 参数空间中势阱深度分别为 $V_0 = 1, 3, 5$ 时系统的稳定性图样. 从图中可以明显的看出, 在不同形状的势阱下系统存在两个临界值 g_{max} 和 g_{coll} , 并将系统分为三个状态: 塌缩态、束缚态和扩散态. 当 $g < g_{\text{coll}}$, 由于过强的吸引相互作用, 系统发生塌缩, 导致整个系统不稳定; 当 $g_{\text{coll}} < g < g_{\text{max}}$, 系统处于束缚态, 即凝聚体完全囚禁在势阱中; 当 $g > g_{\text{max}}$, 由于原子间过强的排斥相互作用, 使得凝聚体从势阱中溢出, 系统处于扩散态, 在此状态下, 系统的能量不存在极小值并处于不稳定状态. 如图可知, g_{max} 随着势阱宽度参数 α 的增加而减小, 这说明在相同势阱深度下, 随着势阱宽度的逐渐变窄, 势阱越不容易囚禁凝聚体, 其稳定区域变小. 同时, g_{max} 也依赖于势阱深度, 势阱越深, g_{max} 越大, 即在势阱宽度一定的情况下, 势阱越深系统的稳定性区域就越大, 说明凝聚体在较深的势阱中越容易囚禁. 综上所述, 系统的稳定性与耦合常数和势阱的形状紧密相关.

4 激发态

现在讨论激发态的 BEC 在两维有限深轴对称

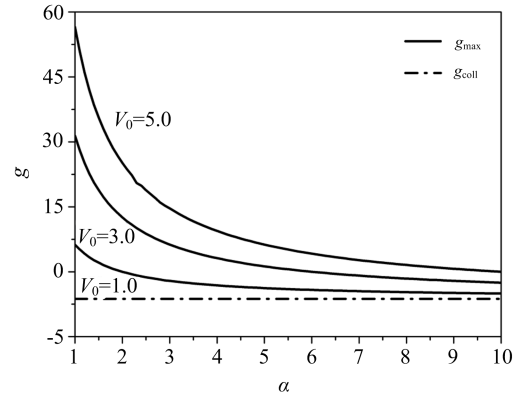


图 1 在 $g - \alpha$ 参数空间中不同势阱深度下系统的稳定性图样. 从下到上势阱深度分别为 $V_0 = 1, 3, 5$, 实线表示最大耦合常数 g_{max} , 点线表示塌缩耦合常数 g_{coll}

的势阱中的稳定性. 用 $g(t) = g_0 + g_1 \sin(\omega t)$ 代替 g , 方程(2)的求解可以转换为拉格朗日密度取极小值变分的问题, 其拉格朗日密度方程为:

$$l = \frac{i}{2} (\dot{\psi}\psi^* - \dot{\psi}^*\psi) - \frac{1}{2} \psi^* \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + V(r) |\psi|^2 + \frac{1}{2} g(t) |\psi|^4 \quad (10)$$

式中星号表示复共轭, 点代表波函数对时间的导数. 将试探波函数

$$\psi(r, t) = A(t) \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho(t)^2} + \frac{i}{2} \beta(t) r^2 + ic(t)\right) \quad (11)$$

代入拉格朗日密度方程(10), 其中 $A(t)$, $\rho(t)$, $\beta(t)$ 和 $c(t)$ 分别表示归一化系数、波包半径、频率和相位. 利用归一化条件(4)并对拉格朗日密度方程

关于空间积分 $L_{\text{eff}} = 2\pi r \int_0^\infty l dr$ 得到拉格朗日方程:

$$L_{\text{eff}} = -\frac{g(t)}{4\pi\rho(t)^2} + \frac{V_0}{1+\alpha\rho(t)^2} - \frac{1+\beta(t)^2\rho(t)^4}{2\rho(t)^2} - c(t) - \frac{1}{2}\rho(t)^2\beta(t) \quad (12)$$

再将(12)式用欧拉-拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{\gamma}(t)}$

进行变换, 其中变分参数 $\gamma(t) = \beta(t), c(t), \rho(t)$, 通过代数计算将方程中的 $\beta(t)$ 和 $c(t)$ 消除, 得到波包半径关于时间演化的二阶微分方程

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{dU(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{\rho^3} + \frac{g(t)}{2\pi\rho^3} - \frac{2V_0\alpha\rho}{(1+\alpha\rho^2)^2} \quad (13)$$

由此可以得到系统的有效势

$$U(\rho) = \frac{1}{2\rho^2} + \frac{g(t)}{4\pi\rho^2} - \frac{V_0}{1+\alpha\rho^2} \quad (14)$$

4.1 BEC 具有恒定的原子间相互作用 ($g_1=0$)

$g_1=0$, 则系统具有恒定的原子间相互作用, 则

方程(14)表示为

$$U(\rho) = \frac{1}{2\rho^2} + \frac{g_0}{4\pi\rho^2} - \frac{V_0}{1+\alpha\rho^2} \quad (15)$$

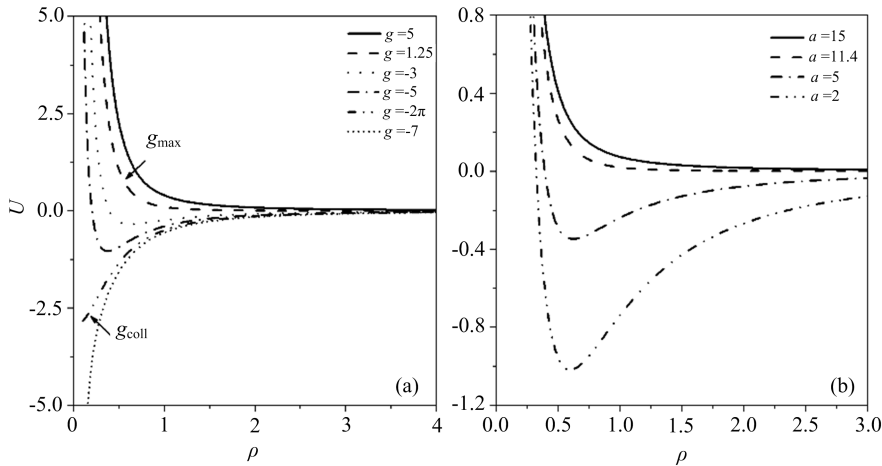


图 2 有效势 U 和波包半径 ρ 的关系. (a) $V_0=3, \alpha=5$, (b) $V_0=3, g=-3$

可以利用有效势来划分系统的状态. 图 2(a) 为势阱形状固定时 ($V_0=3, \alpha=5$) 不同耦合常数 g 下有效势 $U(\rho)$ 和波包半径 ρ 的关系. 如图所示, 有效势在 $g_{coll} < g < g_{max}$ 之间存在最小值, 说明系统处于稳定的束缚态. 当 $g = g_{coll} = -2\pi$, 势阱最低点的井壁消失导致凝聚体塌缩至无限深的空间中, 系统处于塌缩态. 当 $g > g_{max}$ 凝聚体间原子相互作用太强, 导致粒子迅速从势阱中溢出, 系统处于扩散态. 图 2(b) 绘制了在给定势阱深度下, 不同势阱宽度 α 对系统有效势 $U(\rho)$ 的影响. 可以看出, 随着 α 增大, 有效势的外壁逐渐降低, 直至 $\alpha=11.4$ 时, 有效势的外壁无法囚禁凝聚体, 凝聚体从势阱中溢出, 系统变为不稳定状态, 这说明势阱越窄, 系统越难以稳定. 图 2 的结果与图 1 结论相吻合, 系统也分为三种状态, 这说明激发态下系统也能存在稳定的束缚态.

4.2 BEC 具有调制的原子间相互作用 ($g_1 \neq 0$)

凝聚体具有调制的原子间相互作用, 即 $g = g_0 + g_1 \sin(\omega t)$, 在此 g_0 对应于散射长度的恒定部分, $g_1 \sin(\omega t)$ 对应于振动部分, 其中 ω 为振动频率. 对应于这种情况, 可以将波包半径定义为 $\rho = \rho_0 + \rho_1$, ρ_0 对应慢变部分, 而 ρ_1 对应快变部分. 将其代入方程(13)并进行线性化, 保留至 ω^{-2} , 可以得到 ρ_0 和 ρ_1 的动力学方程:

$$\frac{d^2 \rho_1}{dt^2} = \frac{g_1 \sin(\omega t)}{2\pi\rho_0^3} \quad (16)$$

$$\frac{d^2 \rho_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho_0^3} + \frac{g_0}{2\pi\rho_0^3} - \frac{2V_0\alpha\rho_0}{(1+\alpha\rho_0^2)^2} - \frac{3g_1\rho_1 \overline{\sin(\omega t)}}{2\pi\rho_0^4} \quad (17)$$

其中上划线代表函数对时间的平均值. 通过方程(16)可以计算出 ρ_1 , 将其代入方程(17)可以得到波包半径慢变部分的动力学方程以及有效势:

$$\frac{d^2 \rho_0}{dt^2} = \frac{1}{\rho_0^3} + \frac{g_0}{2\pi\rho_0^3} - \frac{2V_0\alpha\rho_0}{(1+\alpha\rho_0^2)^2} - \frac{3g_1^2}{8\pi^2\omega^2\rho_0} \quad (18)$$

$$U(\rho_0) = \frac{1}{2\rho_0^2} + \frac{g_0}{4\pi\rho_0^2} - \frac{V_0}{1+\alpha\rho_0^2} - \frac{g_1^2}{16\pi^2\omega^2\rho_0^6} \quad (19)$$

图 3 绘制了不同耦合常数 g 下有效势 $U(\rho)$ 和波包半径 ρ_0 的关系, 图 3(a) 为 $\omega=10\pi$ 的情况, 图 3(b) 为 $\omega=20\pi$ 的情况. 从图中可以发现, 随着 g 的不断减小, 有效势的最小值也越来越小, 有效势一直存在最小值, 整个系统不存在塌缩的情况, 即系统在很强的吸引相互作用下可以一直维持稳定. 当 $g > g_{max}$, 有效势不存在最小值, 系统处于发生扩散的不稳定状态. 有效势的深度随着震荡频率 ω 的增加而增大. 由此可知, 原子间相互作用的调制导致凝聚体不发生塌缩, 但是不会影响其扩散的状态, 所以由于调制的影响, BEC 比较容易控制, 在实验上也易于实现.

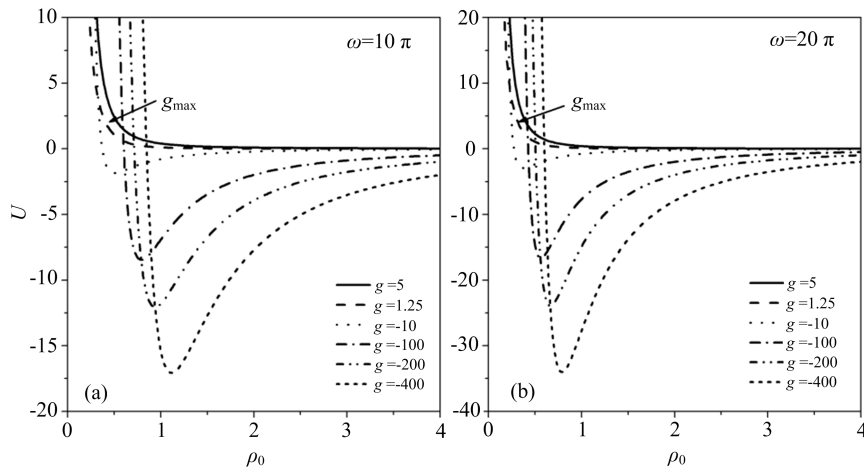


图3 不同耦合常数 g 下有效势 U 和波包半径 ρ_0 的关系. $V_0=3, \alpha=5$. (a) $\omega=10\pi$, (b) $\omega=20\pi$.

5 涡旋态

以下来讨论处于涡旋态时系统的稳定性,此状态下试探波函数定义为

$$\psi = Ar^m e^{-r^2/2\rho^2} \exp(im\theta) \quad (20)$$

其中 m 为环绕数. 令 $\varphi = \sqrt{r}\psi = \varphi_{2,m} \exp(im\theta)$, 将其代入非线性薛定谔方程(1)可得到有系统传波波函数的非线性薛定谔方程

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} \varphi_{2,m} + \left(V(r) + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2r^2} \right) \varphi_{2,m} + \frac{g}{r} |\varphi_{2,m}|^2 \varphi_{2,m} = u \varphi_{2,m} \quad (21)$$

其归一化条件为 $2\pi \int_0^\infty |\varphi_{2,m}|^2 dr = 1$. 同基态的情况一样,可以推导出系统在涡旋态下的耦合常数 g 和化学势 u 的表达式:

$$g = -\frac{2^{1+2m} (1+m) \pi (1+\alpha\rho^2)^{-2-m} (-2V_0\alpha\rho^4 + (1+\alpha\rho^2)^{2+m}) \Gamma(1+m)^2}{\Gamma(1+2m)} \quad (22)$$

$$u = -\frac{1+m}{2\rho^2} + V_0 (1+\alpha\rho^2)^{-2-m} (-1 + (1+2m)\alpha\rho^2) \quad (23)$$

其中 Γ 为伽玛函数. 可以看出,若 $m=0$, 方程(22)和(23)与基态情况一致. 同基态一样,系统的塌缩情况发生在 $\rho \rightarrow 0$ 时,即

$$g_{\text{coll}} = -\frac{2^{1+2m} (1+m) \pi \Gamma(1+m)^2}{\Gamma(1+2m)} \quad (24)$$

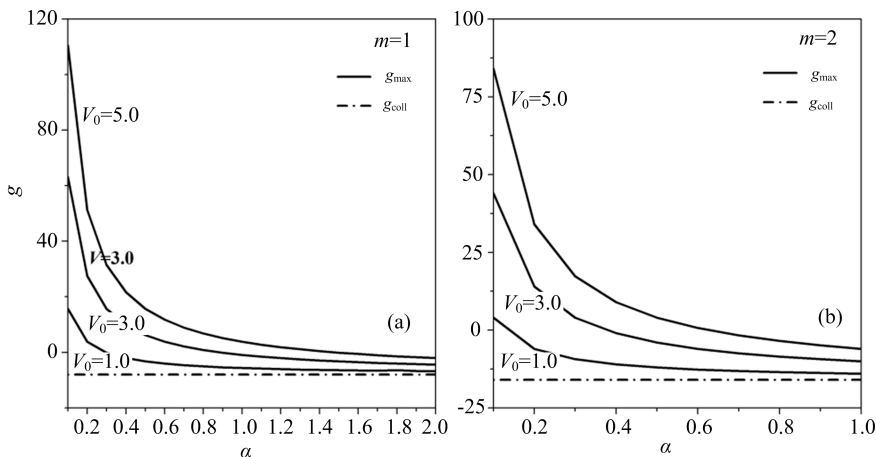


图4 涡旋态中 $g-\alpha$ 参数空间下系统的稳定性图样. (a) $m=1$, (b) $m=2$. 从下到上势阱深度分别为 $V_0=1, 3, 5$, 实线表示最大耦合常数 g_{max} , 点线表示塌缩耦合常数 g_{coll} .

当 $m = 0, 1, 2$ 对应的 $g_{\text{coll}} = -2\pi, -8\pi, -16\pi$, 可以看出涡旋的存在, 降低了系统的塌缩点^[26-27]. 图 4 显示了 $m = 1(a)$ 和 $m = 2(b)$ 时系统的相图. 同基态一样, 系统也存在两个临界值 g_{max} 和 g_{coll} , 并将系统分为塌缩态、束缚态和扩散态三种状态, 并且系统的稳定性与耦合常数和势阱的形状紧密相关.

6 结 论

本文首先利用变分法研究了两维轴对称有限深势阱中相互作用的 BEC 的基态性质, 计算出耦合常数 g 的两个临界值, 这些临界值将系统分为三种状态: 当 $g < g_{\text{coll}}$, 系统处于塌缩态; 当 $g_{\text{coll}} < g <$

g_{max} , 系统处于囚禁在势阱中的束缚态; 当 $g > g_{\text{max}}$, 此时系统的能量不存在极小值, 系统处于扩散态, 粒子迅速从势阱中溢出. 此外绘制了 $g - \alpha$ 参数空间中基态的稳定性图样, 发现 g 和势阱形状参量 V_0 , α 在稳定 BEC 中起着重要作用. 其次研究了激发态下的 BEC 的稳定性, 并进一步讨论了周期性调制原子间相互作用时 BEC 的动力学特性, 证明了在二维情况下, 随时间变化的耦合常数使得有限深势阱中 BEC 的束缚态成为可能. 文章的最后讨论了涡旋态下 BEC 的稳定性, 通过分析可知涡旋可以抑制系统的塌缩. 这些研究结果可以通过实验加以验证, 为进一步讨论 BEC 的性质提供依据.

参 考 文 献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269** (1995), 198.
- [2] M. Karmakar, *Phys. Rev. A*, **97** (2018), 033617.
- [3] L. M. Satarov, I. N. Mishustin, A. Motornenko, V. Vovchenko, M. I. Gorenstein, H. Stoecker, *Phys. Rev. C* **99**(2019), 024909.
- [4] J. Pietraszewicz, M. Stobińska, P. Deuar, *Phys. Rev. A*, **99** (2019), 023620.
- [5] S. Mardonov, V. V. Konotop, B. A. Malomed, M. Modugno, E. Ya. Sherman, *Phys. Rev. A*, **98** (2018), 023604.
- [6] A. J. E. Kreil, D. A. Bozhko, H. Y. Musienko-Shmarova, V. I. Vasyuchka, V. S. L'vov, A. Pomyalov, B. Hillebrands, A. A. Serga, *Phys. Rev. Lett.*, **121** (2018), 077203.
- [7] A. Griffin, *Phys. Rev. B*, **53** (1996), 9341.
- [8] J. K. Xue, P. Peng, *Chin. Phys. B*, **15** (2006), 1149.
- [9] W. Hai, C. Lee, G. Chong, *Phys. Rev. A*, **70** (2004), 053621.
- [10] V. M. Pérez-García, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **77**(1996), 5320.
- [11] P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-González, *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004), 080403.
- [12] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999), 463.
- [13] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 1795.
- [14] Y. Jian, A. X. Zhang, C. X. He, X. Y. Qi, J. K. Xue, *Phys. Rev. E*, **87** (2013), 053201.
- [15] Y. Jian, J. K. Xue, *Eur. Phys. J. D*, **66** (2012), 191.
- [16] D. A. Alcalá, G. Urban, M. Weidemüller, L. D. Carr, *Phys. Rev. A*, **98** (2018), 023619.
- [17] D. W. Zhang, Z. Y. Xue, H. Yan, Z. D. Wang, S. L. Zhu, *Phys. Rev. A*, **85** (2012), 013628.
- [18] G. Cao, L. He, P. Zhuang, *Phys. Rev. A*, **87** (2013), 013613.
- [19] S. Sabari, R. V. J. Raja, K. Porsezian, P. Muruganandam, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **2010**, **43** (2010), 125302.
- [20] Y. Zhang, Z. Gui, Y. Chen, *Phys. Rev. A*, **99** (2019), 023616.
- [21] X. Y. Zhou, A. X. Mu, J. K. Xue, *Chinese Physics*, **16** (2007), 3197.
- [22] S. K. Adhikari, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **38** (2005), 579.
- [23] L. D. Carr, M. J. Holland, B. A. Malomed, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **38** (2005), 3217.
- [24] S. Potnis, R. Ramos, K. Maeda, L. D. Carr, A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **118** (2017), 060402.
- [25] F. K. Abdullaev, M. Salerno, *Phys. Rev. A* **72** (2005), 033617.
- [26] R. J. Dodd, M. Edwards, C. J. Williams, C. W. Clark, M. J. Holland, P. A. Ruprecht, K. Burnett, *Phys. Rev. A*, **54** (1996), 661.
- [27] T. J. Alexander, L. Bergé, *Phys. Rev. E* **65** (2002), 026611.