

随机边界对相对论气体玻色-爱因斯坦凝聚临界温度的影响

尹慧^{1†}, 李海鸥², 王哲¹, 孔祥木¹

1. 曲阜师范大学物理工程学院, 山东曲阜 273165;

2. 烟台工贸技师学院, 山东烟台 264000

收稿日期: 2019-02-27; 接收日期: 2019-05-06

【摘要】 研究了随机边界对立方箱中相对论气体玻色-爱因斯坦凝聚临界温度的影响. 在均匀分布、双模分布和高斯分布情况下, 分别计算了临界温度与固定箱中的气体临界温度的比值, 发现随机边界降低了系统的临界温度. 相对于极端相对论情况, 非相对论极限下的临界温度更低.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 临界温度, 随机箱, 相对论玻色气体

PACS: O414. 2

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.03.008

Influence of Random Boundary on the Critical Temperature of Bose-Einstein Condensation in Relativistic Gases

YIN Hui¹, LI Haiou², WANG Zhe¹, KONG Xiangmu¹

1. College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China;

2. Yantai Industry & Trade Technician College, Yantai 264000, China

Received date: 2019-02-27; accepted date: 2019-05-06

【Abstract】 In this paper, the influence of the random boundary on critical temperature of the Bose-Einstein condensation of relativistic gas in a cubic box is studied. Assume that the boundary of the box satisfies the uniform distribution, double mode distribution and Gaussian distribution, respectively, the ratio of the critical temperature to that of the gas in the fixed box is calculated. It is found that the random boundary reduces the critical temperature of the system. The critical temperature in the nonrelativistic limit is lower than that in the extreme relativistic case.

Keywords: Bose-Einstein condensation, Critical temperature, Random box, Relativistic Bose gas

PACS: O414. 2

DOI: 10.13380/j.ltpl.2019.03.008

Reference method: YIN Hui, LI Haiou, WANG Zhe, KONG Xiangmu, Low. Temp. Phys. Lett. **41**, 0297 (2019)

* 国家自然科学基金(11675090)资助的课题.

[†] yinhui-654@163.com

1 引言

自然界中的全同粒子一般分为两类:费米子和玻色子,它们的自旋量子数分别是半整数和整数.在平衡态情况下,这两种系统中的粒子数满足不同的统计分布.对于玻色子系统,同一个量子态上可以占据任意个数的粒子.在系统处于平衡态时,温度越低,低能级上的粒子数越多,当温度低于某一特定温度时,玻色子在基态上大量聚集,这些粒子具有相同波函数,这种宏观量子现象被称为玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein Condensation, 简称 BEC),在零温情况下,所有的玻色子都聚集在最低能量态.早在1924年玻色和爱因斯坦就从理论上预言了这样一种物质状态,BEC实际上是粒子在动量空间的凝聚^[1].理论预言70年后,1995年,第一次在实验室里实现了BEC^[2-4].随后,对BEC的理论研究和实验研究都得到迅速发展^[1].

近十多年来,考虑相对论效应的BEC现象同样引起了人们的重视^[5].相关研究早在二十世纪六十年代就已经开始.1965年,Landsberg和Dunning-Davies研究了三维相对论理想玻色气体的凝聚温度^[6],Beckmann等将此工作加以推广,详细研究了 d 维相对论玻色气体系统,讨论了非相对论极限和极端相对论极限下BEC的临界温度.通过比较发现在极端相对论极限下,二维系统就可以发生BEC现象,这明显不同于非相对论情况(二维系统不会发生BEC)^[7,8].此外,在有相互作用玻色气体的研究方面,1983年Dixit等研究了在特定能谱下相对论玻色气体的热力学性质^[9],2009年Witkowska等人用经典场论的方法对有相互作用的相对论玻色气体进行了研究^[10].

以上的研究主要是在固定边界条件下进行的.1999年Karbowsky等对随机箱中理想玻色气体的行为进行了研究,由于随机边界条件导致了系统中的淬致无序,这种无序使BEC的有关性质发生了相应改变^[11].本文将对随机箱中的相对论玻色气体进行研究,讨论这些淬致无序对BEC临界温度的影响.本文研究了非相对论和极端相对论两种极限情况,并考虑了三种不同的随机箱形式,探讨了随机箱对临界温度的影响规律.

2 随机箱中玻色系统的BEC临界温度

考虑体积为 $V=L_0^3$ 立方箱子(刚性)中的 N 个

质量为 m 的理想玻色子系统,在平衡态情况下,玻色气体的粒子数

$$N = \sum_n \rho_n = \sum_n \frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1}, \quad (1)$$

其中, $\beta=1/(k_B T)$, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为热力学温度; E_n 为粒子能级, μ 为化学势.考虑到相对论效应,每个玻色子的能量为^[5]

$$E_n = \sqrt{c^2 \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^2 + m^2 c^4}. \quad (2)$$

在非相对论和极端相对论极限情况下,

$$E_n = \begin{cases} \frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2} + mc^2, & k_B T \ll mc^2, \\ \text{(非相对论极限)} \\ \frac{2\pi\hbar c}{L} + \frac{m^2 c^3 L}{2\pi\hbar}, & k_B T \gg mc^2. \\ \text{(极端相对论极限)} \end{cases} \quad (3)$$

其中 c 为光速, n 为玻色子量子数.当发生BEC时, $\mu \rightarrow \mu_c = mc^2$.当体积很大时,(1)式中的求和可以化为积分, $\sum_n \rightarrow \int_0^\infty d^3 n$,粒子数密度可表示为

$$\rho = \frac{N}{L_0^3} = \frac{1}{L_0^3} \int_0^\infty d^3 n \frac{1}{e^{\beta(E_n - \mu)} - 1}. \quad (4)$$

现在,考虑箱子的尺寸随机变化的情形.根据突变微扰理论,当箱子的体积扩大或缩小时,凝聚的粒子将以有限的概率跃迁.在箱子的有效长度内,这种不确定性被称为淬致无序,淬致无序将会使BEC的临界温度发生改变^[11].设箱子的长度满足分布 $P(L)$,则系统的平均粒子数为

$$\bar{\rho} = \frac{1}{L_0^3} \int_0^\infty P(L) dL \left[\int_0^\infty d^3 n \frac{1}{e^{\beta_c(E_n - mc^2)} - 1} \right], \quad (5)$$

其中, $\bar{\rho} = \int_0^\infty \rho(L) P(L) dL$ 为 ρ 的平均值, L_0^3 为箱子的平均体积.

下面,我们分别研究非相对论极限和极端相对论极限情况下系统的凝聚温度.在非相对论极限下,由(3),(4)和(5)可以看出

$$\rho = \int_0^\infty d^3 n \frac{1}{e^{\beta_c \left[\frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2} \right]} - 1}, \quad (6)$$

可得平均粒子数密度

$$\bar{\rho} = \frac{1}{L_0^3} \int_0^\infty P(L) dL \left\{ \int_0^\infty d^3 n \frac{1}{e^{\beta_c \left[\frac{(2\pi\hbar)^2}{2mL^2} \right]} - 1} \right\}. \quad (7)$$

积分(6)和(7)式可得^[12]

$$T_c^1 = T_c^{\text{NR}} \left(\frac{L_0^3}{\langle L^3 \rangle} \right)^{2/3}, \quad (8)$$

这里 T_c^{NR} 为非相对论情况下刚性系统的临界温度, T_c^1 为随机边界情况的临界温度.

类似的,在极端相对论极限下,

$$T_c^2 = T_c^{\text{UR}} \left(\frac{L_0^3}{\langle L^3 \rangle} \right)^{1/3}, \quad (9)$$

这里 T_c^{UR} 为极端相对论情况刚性系统的临界温度, T_c^2 为随机边界情况的临界温度. 可以看出,随机箱中相对论气体发生 BEC 的临界温度大小取决于箱子边界的分布.

3 结果与讨论

作为几个特例,设箱子边长分别满足以下 3 种分布 $P_{\Delta}^{(k)}(L)$ ($k=1,2,3$):

均匀分布:

$$P_{\Delta}^{(1)}(L) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta}, & L_0 - \Delta \leq L \leq L_0 + \Delta; \\ 0, & L < L_0 - \Delta, \text{ 或 } L > L_0 + \Delta; \end{cases} \quad (10)$$

双模分布:

$$P_{\Delta}^{(2)}(L) = \frac{1}{2} \delta(L - L_0 + \Delta) + \frac{1}{2} \delta(L - L_0 - \Delta); \quad (11)$$

高斯分布:

$$P_{\Delta}^{(3)}(L) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\Delta^2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{L_0}{\sqrt{\pi}\Delta}\right) \right]} e^{-\frac{(L-L_0)^2}{2\Delta^2}}. \quad (12)$$

其中, L_0 为箱子的平均长度, Δ 为箱子长度的波动, 3 个分布函数均已归一化.

3.1 均匀分布

对于均匀分布(10),可以求得

$$\langle L^3 \rangle = \int_{L_0-\Delta}^{L_0+\Delta} L^3 P_{\Delta}^{(1)}(L) dL = L_0^3 \left(1 + \frac{\Delta^2}{L_0^2} \right). \quad (13)$$

令 $\epsilon = \Delta/L_0$, 由(8),(9)和(13)式可以得到

$$T_c^1 = T_c^{\text{NR}} \frac{1}{[1 + \epsilon^2]^{2/3}} \text{ (非相对论极限)}, \quad (14)$$

$$T_c^2 = T_c^{\text{UR}} \frac{1}{[1 + \epsilon^2]^{1/3}} \text{ (极端相对论极限)}. \quad (15)$$

从以上 2 式可以看出,在均匀分布的情况下,无论在非相对论极限还是在极端相对论极限下,随机箱中相对论气体的 BEC 临界温度都低于刚性箱子中的临界温度.

3.2 双模分布

根据双模分布(11)式,可以求得

$$\langle L^3 \rangle = \int_{L_0-\Delta}^{L_0+\Delta} L^3 P_{\Delta}^{(2)}(L) dL = L_0^3 \left(1 + \frac{3\Delta^2}{L_0^2} \right),$$

将上式分别代入(14)式和(15)式得

$$T_c^1 = T_c^{\text{NR}} \frac{1}{[1 + 3\epsilon^2]^{2/3}} \text{ (非相对论极限)}, \quad (16)$$

$$T_c^2 = T_c^{\text{UR}} \frac{1}{[1 + 3\epsilon^2]^{1/3}} \text{ (极端相对论极限)}. \quad (17)$$

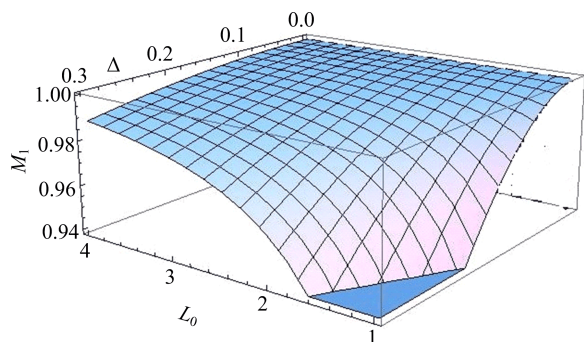
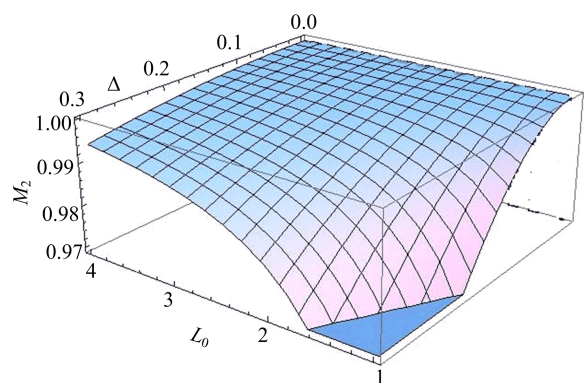
从以上两式可以看出,在双模分布的情况下,无论在非相对论极限下还是在极端相对论极限下,随机边界条件对 BEC 临界温度的影响与均匀分布时类似.

3.3 高斯分布

在高斯分布情况下,积分式子(12)可得^[13]

$$\begin{aligned} \langle L^3 \rangle &= \int_0^{\infty} L^3 P_{\Delta}^{(3)}(L) dL = L_0^3 \left(1 + \frac{3\Delta^2}{L_0^2} \right) \\ &+ \frac{2L_0^2 \Delta \left(1 + 2 \frac{\Delta^2}{L_0^2} \right)}{\sqrt{2\pi} + \operatorname{erf}\left(\frac{L_0}{\sqrt{\pi}\Delta}\right)} \exp\left(-\frac{L_0^2}{2\Delta^2}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

可以看出,当 Δ/L_0 很小时,上式第二项可以忽略,得到与双模分布相同的结果. 为了更加直观地看出 Δ 对临界温度的影响,下面给出数值计算结果. 设 $M_1 = T_c^1/T_c^{\text{NR}}$, $M_2 = T_c^2/T_c^{\text{UR}}$, 注意到(8)和(9)两式,对 M 随 Δ 及 L_0 的变化关系进行了计算,得到了随机箱中相对论气体发生 BEC 的临界温度与固定箱子中的临界温度的关系,见图 1 和图 2. 可以看出,高斯分布下,无论是在非相对论极限还是极端相对论极限下, L_0 为一定值时, M 随 Δ 的减小而增大,也就是说,对于一定的 L_0 , Δ 越小, T_c 越接近于 T_c^{R} , 淬致无序的程度随 Δ 的减小而减小. 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $M \rightarrow 1$. 当 Δ 为一定值时, M 随 L_0 的增大而增大. 当 L_0 无限大时,即箱子的体积无限大时, T_c 趋于 T_c^{R} . 通过(8)和(9)式还可以看出,相同情况下,随机边界对临界温度的影响在非相对论情况下要比极端相对论情况更大一些.

图1 M_1 随 Δ 及 L_0 的变化关系(非相对论极限)图2 M_2 随 Δ 及 L_0 的变化关系(极端相对论极限)

由上面的讨论可以看出,在三维空间中,对于高斯分布, T_c 与 T_c^E 的比值受 L_0 、 Δ 的影响,但是,被限制在随机箱中的相对论气体发生玻色-爱因斯坦凝聚的临界温度总是低于固定箱子中的临界温度.

4 总 结

假设随机箱的边界满足均匀分布、双模分布和高斯分布,分别研究了相对论性玻色气体的 BEC 临界温度.我们计算了三维空间内箱子的边界分布三种情况下的 BEC 临界温度,并与固定箱情况相比较.得到结论如下:随机箱内的玻色气体 BEC 临界温度与箱子边界所满足的分布函数有关,在非相对论和极端相对论两种极限下,随机箱中的 BEC 临界温度均比固定箱中的低.相对地,和极端相对论情况相比,非相对论极限下的临界温度更低.

参 考 文 献

- [1] C. J. Pethick, H. Smith, Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases, Cambridge University, England, 2002.
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269** (1995), 198.
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 1687.
- [4] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75** (1995), 3969.
- [5] M. Grether, M. de Llano, George A. Baker, Jr, *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007), 200406.
- [6] P. T. Landsberg, J. Dunning-Davies, *Phys. Rev.*, **138** (1965), A1049.
- [7] R. Beckmann, F. Karsch, D. E. Miller, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 1277.
- [8] R. Beckmann, F. Karsch, D. E. Miller, *Phys. Rev. A*, **25** (1982), 561.
- [9] V. V. Dixit, D. E. Mille, *Phys. Rev. A*, **28** (1983), 1709.
- [10] E. Witkowska, P. Zin, M. Gajda, *Phys. Rev. D*, **79** (2009), 025003.
- [11] J. Karbowski, L. A. Turski, *Physica A*, **276** (2000), 489.
- [12] H. Li, Y. Wang, X.-M. Kong, Z. Q. Lin, *Mod. Phys. Lett. B*, **26** (2012), 1250075.
- [13] 王赛,王春阳,李敏,孔祥木,低温物理学报, **32** (2010), 370.